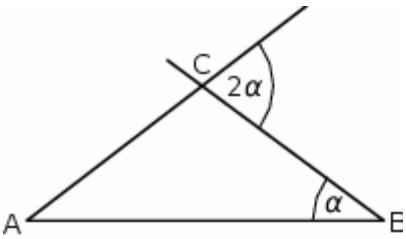
Zestaw 9

Rozwiązania

Zadanie 1

Uzasadnij, że oba kąty przy podstawie AB trójkąta ABC są równe.



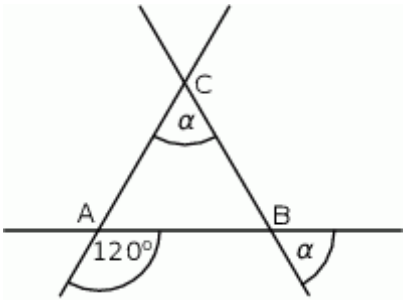
Rozwiązanie:

$\sphericalangle ACB = 180° - 2\alpha$

$\sphericalangle BAC = 180° - (\sphericalangle ABC + \sphericalangle ACB) = 180° - (\alpha + 180° - 2\alpha) = \alpha$

Zadanie 2

Trzy proste przecinające się w sposób przedstawiony na rysunku tworzą trójkąt ABC. Uzasadnij, że trójkąt ABC jest równoboczny.



Rozwiązanie:

Liczymy miary kątów trójkąta ABC.

$\angle BAC = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$
$\angle ABC = \alpha.$

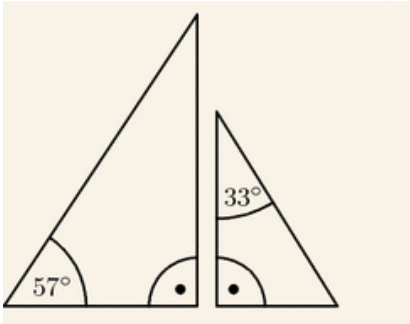
Suma kątów w trójkącie ABCjest równa 180°, więc

$60^\circ + \alpha + \alpha = 180^\circ$
$2\alpha = 120^\circ$
$\alpha = 60^\circ.$

W takim razie każdy z kątów trójkąta ABC ma miarę 60°. Jest to więc trójkąt równoboczny.

Zadanie 3

Na rysunku przedstawiono dwa trójkąty prostokątne.



Czy te trójkąty są trójkątami podobnymi? Wybierz odpowiedź T (tak) albo N (nie) i jej uzasadnienie spośród zdań oznaczonych literami A-C.

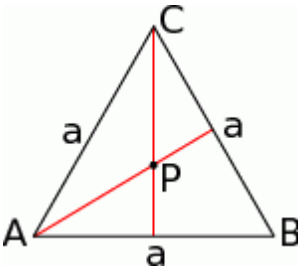
T	ponieważ	A	każde dwa trójkąty prostokątne są podobne.
		B	miary kątów ostrych jednego trójkąta są różne od miar kątów ostrych drugiego trójkąta.
N		C	Miary kątów ostrych jednego trójkąta są takie same jak miary kątów ostrych drugiego trójkąta.

Rozwiązanie TC

Zadanie 4

Punkt P jest punktem przecięcia wysokości trójkąta równobocznego. Jakie pole ma ten trójkąt, jeśli odcinek łączący punkt P z wierzchołkiem trójkąta ma długość $2\sqrt{3}$

Rozwiązanie:



Będziemy korzystać ze wzoru na wysokość w trójkącie równobocznym o boku a

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

oraz z tego, że punkt P dzieli wysokość w stosunku 2:1 (licząc od wierzchołka).

Mamy równanie

$$\frac{2}{3}h = 2\sqrt{3}$$
$$\frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$
$$\frac{a}{3} = 2 \quad \Rightarrow \quad a = 6.$$

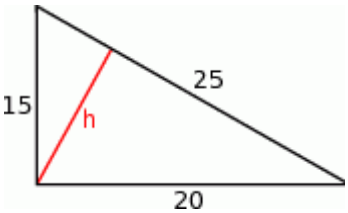
Zatem pole trójkąta jest równe

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}.$$

Zadanie 5

Wiedząc, że boki trójkąta prostokątnego mają długości: 20, 15, 25, wyznacz długość wysokości opuszczonej na przeciwprostokątną.

Rozpoczynamy od szkicowego rysunku.

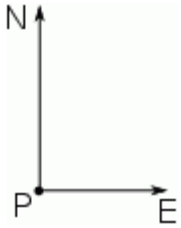


Długość wysokości h możemy wyliczyć licząc pole trójkąta na dwa sposoby.

$$\frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 20 = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot h \quad / \cdot \frac{2}{25}$$
$$3 \cdot 4 = h \quad \Rightarrow \quad h = 12.$$

Zadanie 6

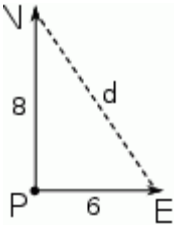
Z portu rybackiego (punkt P) wypłynęły jednocześnie na połów dwa kutry: jeden na północ ze stałą prędkością 4 węzłów, drugi na wschód ze stałą prędkością 3 węzłów. Oblicz odległość między tymi kutrami po dwóch godzinach od wypłynięcia. Wynik podaj w kilometrach. Zapisz obliczenia.



Do rozwiązania zadania skorzystaj z informacji: 1 węzeł to 1 mila morska na godzinę, 1 mila morska = 1852 m.

Rozwiązanie:

Statek płynący na północ po 2 godzinach przepłynie 8 mil, a statek płynący na wschód przepłynie 6 mil.



Odległość d między statkami możemy obliczyć z twierdzenia Pitagorasa.

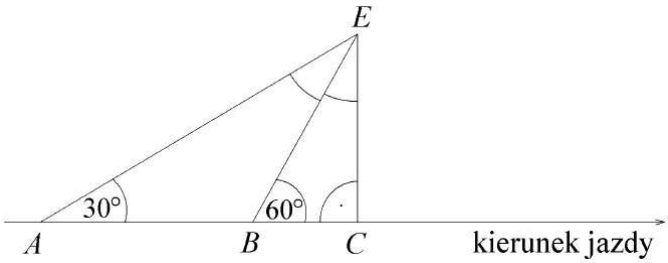
$$d = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10.$$

Musimy jeszcze ten wynik przeliczyć na kilometry.

$$10 \cdot 1852m = 18520m = 18,52km.$$

Zadanie 6

Jadąc długą, prostą drogą, Ewa widziała elektrownię wiatrową zaznaczoną na rysunku literą E. Z punktu A widać było elektrownię pod kątem 30º od kierunku jazdy, a z punktu B – pod kątem 60º. Długość odcinka AB jest równa 20 km. Po pewnym czasie, przejeżdżając przez punkt C, Ewa minęła elektrownię.
Wpisz na rysunku miary kątów zaznaczonych łukami (∡ BEC i ∡ AEB). Oblicz odległość (BE) elektrowni od punktu B oraz odległość (CE) elektrowni od drogi. Zapisz obliczenia. Wynik zaokrąglij do części dziesiątych.
Przyjmij $\sqrt{3} = 1,73$



Rozwiązanie:

Obliczenie miar kątów *BEC* i *AEB*

Korzystając z własności sumy miar kątów w trójkącie, mamy $\sphericalangle BEC = 180^o - (90^o + 60^o) = = 30^o$, $\sphericalangle AEB = 180^o - (120^o + 30^o) = 30^o$
Trójkąt *ABE* jest trójkątem równoramiennym, w którym *BE* = *AB*, czyli *BE* = 20 km.
Trójkąt *BCE* jest trójkątem prostokątnym będącym połową trójkąta równobocznego o boku równym *BE*, więc długość boku *BC* = 21
BE, czyli *BC* = 10 km.
Obliczenie długości boku *CE* w trójkącie *BCE*
Korzystając z twierdzenia Pitagorasa
$(CE)^2 + (BC)^2 = (BE)^2$
$(CE)^2 = (BE)^2 - (BC)^2$
$(CE)^2 = 20^2 - 10^2$
$(CE)^2 = 300$
$CE = 310$

$CE = 10 \cdot 1{,}73$
$CE = 17{,}3$ (km)
Odp. Odległość elektrowni od drogi wynosi 17,3 km.

Zadanie 7

Trójkąt równoboczny, kwadrat i sześciokąt foremny mają ten sam obwód długości 10cm. Oblicz pole każdej z tych figur. Która z nich ma największe pole, a która najmniejsze?

Boki trójkąta, kwadratu i sześciokąta wynoszą odpowiednio

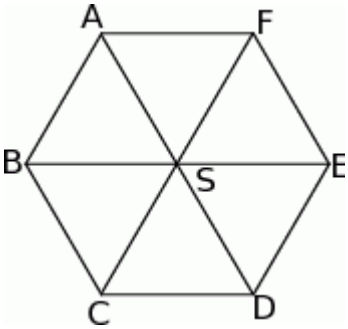
$$\frac{10}{3}$$
$$\frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$
$$\frac{10}{6} = \frac{5}{3}.$$

Ze wzoru na pole trójkąta równobocznego o boku a, pole trójkąta wynosi

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{100\sqrt{3}}{36} = \frac{25\sqrt{3}}{9} \approx 4,8.$$

Pole kwadratu jest równe

$$a^2 = \frac{25}{4} = 6,25.$$



Sześciokąt foremny składa się z 6 trójkątów równobocznych, ze wzoru na pole takiego trójkąta, pole sześciokąta wynosi

$$6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 6 \cdot \frac{25\sqrt{3}}{36} = \frac{25\sqrt{3}}{6} \approx 7,22.$$

Odpowiedź: Pola trójkąta, kwadratu, sześciokąta: $\frac{25\sqrt{3}}{9} < \frac{25}{4} < \frac{25\sqrt{3}}{6}$